Практическое занятие №7.

Задачи для самостоятельной работы студента

Решение задач по темам: **Приложения производной.**

1. Используя правило Лопиталя найти пределы:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^x$; c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+2^x\right)^{\frac{1}{x}}$; d) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$

2. Разложить функцию по соответствующим степеням.

a) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ по степеням $x-2$ до члена, содержащего $(x\text{-}2)^4$

b) многочлен $P(x)=x^4-2x^3+7x-4$ по степеням $x-1$.

ОБРАЗЦЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задачи из Лекции №7 (ФИТ)

Пример 1. Применяя правило Лопиталя, найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{chx}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Пример 2. Разложить многочлен $P(x)=1+3x+5x^2-2x^3$ по степеням $x+1$, используя формулу Тейлора.

Пример 3. Найти три члена разложения функции $f(x)=\sqrt{x}$ по целым неотрицательным степеням разности $x-1$.

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Пример:

Проверить, справедлива ли теорема Ролля для функции $f(x)=$ $=x^2-2x$ на отрезке $[-1;3]$, найти соответствующее значение c (если оно существует).

◑ Функция непрерывна на отрезке $[-1;3]$ и дифференцируема на интервале $(-1;3)$. Кроме того, $f(-1)=f(3)=3$, поэтому теорема Ролля на данном отрезке для данной функции справедлива. Найдем значение $c\in(-1;3)$, для которого $f'(c)=0$, из равенства $(x^2-2x)'=0$, т.е. $2x-2=0$, откуда $x=1$. Поскольку $1\in(-1;3)$, то $c=1$ — искомое значение. ●

Пример:

4. Доказать, что $|\cos x-\cos y|\leqslant|x-y|$ $\forall x,y$.

△ По формуле Лагранжа

$$\cos x-\cos y=\sin\xi\cdot(x-y),$$

где ξ — некоторая точка из интервала (x,y). Так как $|\sin\xi|\leqslant 1$, то $|\cos x-\cos y|\leqslant|x-y|$. ▲

Примеры:

90. Доказать неравенства:

а) $|\sin x - \sin y| \leqslant |x-y|$; б) $py^{p-1}(x-y) \leqslant x^p - y^p \leqslant px^{p-1}(x-y)$, если $0 < y < x$ и $p > 1$

в) $|\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b| \leqslant |a-b|$; г) $\dfrac{a-b}{a} < \ln\dfrac{a}{b} < \dfrac{a-b}{b}$, если $0 < b < a$.

◀ По формуле Лагранжа, имеем:

а) $\sin x - \sin y = (x-y)\cos\xi$, откуда $|\sin x - \sin y| = |\cos\xi||x-y| \leqslant |x-y|$;

б) $x^p - y^p = p\xi^{p-1}(x-y)$, $y < \xi < x$, откуда $(x-y)py^{p-1} \leqslant x^p - y^p \leqslant (x-y)px^{p-1}$;

в) $\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b = \frac{1}{1+\xi^2}(a-b)$, откуда $|\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b| \leqslant |a-b|$;

г) $\ln a - \ln b = \frac{1}{\xi}(a-b)$, $a < \xi < b$, откуда $\frac{a-b}{a} < \ln\frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$ ▶.

Примеры:

2. Найти

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3}.$$

△ Этот предел является неопределенностью типа $0/0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\operatorname{tg} x - x)'}{(x^3)'}\ \lim_{x\to 0}\frac{1/\cos^2 x - 1}{3x^2}$$

также является неопределенностью типа $0/0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1/\cos^2 x - 1)'}{(3x^2)'} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cos^{-3} x\sin x}{6x}$$

снова является неопределенностью типа $0/0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(2\cos^{-3} x\sin x)'}{(6x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{6\cos^{-4} x\sin^2 x + 2\cos^{-2} x}{6} = \frac{1}{3}.$$

Примеры:

Найти пределы, используя правило Лопиталя:

1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin 3x}{\ln x}$;

2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x - \sin x}$.

◑ 1) Поскольку $\ln\sin 3x$ и $\ln x$ стремятся к бесконечности при $x\to 0$, то в данном случае имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Применяя правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin 3x}{\ln x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\ln\sin 3x)'}{(\ln x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{3x\cdot\cos 3x}{\sin 3x} =$$

$$= 3\lim_{x\to 0}\cos 3x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(\frac{\sin 3x}{x}\right)} = 3\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}} = 1.$$

В последнем равенстве мы воспользовались первым замечательным пределом.

2) $\lim\limits_{x\to 0} x^3 = \lim\limits_{x\to 0}(x-\sin x) = 0$, поэтому имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Воспользуемся правилом Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x-\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{(x^3)'}{(x-\sin x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{1-\cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(3x^2)'}{(1-\cos x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{6x}{\sin x} = 6\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}} = 6.$$

В этом примере правило Лопиталя применялось дважды. ●

Примеры:

Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0+0} x\ln x$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right)$.

◐ 1) Здесь имеет место неопределенность вида $0\cdot\infty$, которую мы раскроем, предварительно сведя ее к неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$; а далее воспользуемся правилом Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0+0} x\cdot\ln x = \lim_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{\left(\frac{1}{x}\right)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0+0}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0+0}\frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = -\lim_{x\to 0+0} x = 0.$$

2) Имеем неопределенность $\infty-\infty$. Сведем ее к неопределенности $\frac{0}{0}$, приведя дроби к общему знаменателю:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1-\ln x)'}{((x-1)\ln x)'} = \lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)'}{\left(\ln x + 1 - \frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}.$$

Правило Лопиталя в этом примере применялось дважды. ●

Пример: **Найти предел:**

2) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$

2) Здесь неопределенность вида 1^∞. Обозначив $y = (\cos x)^{\frac{1}{x}}$, найдем $\lim\limits_{x\to 0} \ln y$:

$$\lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} \ln(\cos x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{(\ln(\cos x))'}{x'} = \lim_{x\to 0}(-\operatorname{tg} x) = 0.$$

Отсюда $\ln \lim\limits_{x\to 0} y = \lim\limits_{x\to 0} \ln y = 0$, т. е. $\lim\limits_{x\to 0} y = \lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}} = 1$. ●

Пример:

1. Разложить функцию $\operatorname{tg} x$ по формуле Маклорена до члена с x^3 включительно.

△ Найдем производные функции $f(x) = \operatorname{tg} x$ до третьего порядка включительно:

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = \cos^{-2} x;$$
$$f''(x) = 2\cos^{-3} x \sin x;$$
$$f'''(x) = 6\cos^{-4} x \sin^2 x + 2\cos^{-2} x.$$

Отсюда получаем $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = 2$. По формуле Маклорена с остаточным членом в форме Пеано имеем

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Заметим, что вычисление $f^{(4)}(x)$ дает $f^{(4)}(0) = 0$. Поэтому остаточный член можно записать в виде $o(x^4)$. ▲

Пример:

Разложить многочлен $P(x) = x^4 - x^3 + 5x^2 - 4x + 1$ по степеням $x - 1$, используя формулу Тейлора.

◐ Так как $P^{(n)}(x) \equiv 0$ при $n \geqslant 5$, то в разложении данного многочлена по формуле Тейлора будут только слагаемые вида $\frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)$, где $k \leqslant 4$. Поэтому

$$P(x) = P(1) + \frac{P'(1)}{1!}(x-1) + \frac{P''(1)}{2!}(x-1)^2 +$$
$$+ \frac{P'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{P^{(IV)}(1)}{4!}(x-1)^4.$$

Учитывая, что $P(1) = 2$, $P'(1) = 7$, $P''(1) = 16$, $P'''(1) = 18$, $P^{(IV)}(1) = 24$, получим окончательно

$$P(1) = 2 + 7(x-1) + 8(x-1)^2 + 3(x-1)^3 + (x-1)^4. \qquad \bullet$$

Примеры:

1) Разложить по формуле Тейлора функцию $f(x) = \dfrac{1}{x}$ в точке $x_0 = 1$;

2) Разложить по формуле Маклорена функцию $f(x) = \operatorname{arctg} x$ до $o(x^3)$.

◐ 1) Сначала найдем формулу для n-го члена разложения. Так как

$$f'(1) = -1!,\ f''(1) = 2!,\ f'''(1) = -3!,\ f^{(IV)}(1) = 4!,\ \ldots,$$
$$f^{(n)}(1) = (-1)^n \cdot n!,$$

то $\dfrac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n = (-1)^n \cdot (x-1)^n$. Отсюда

$$\frac{1}{x} = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \ldots$$
$$\cdots + (-1)^n \cdot (x-1)^n + o((x-1)^n), \quad x \to x_0.$$

2) Необходимо представить данную функцию в виде

$$\operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg}(0) + \frac{\operatorname{arctg}'(0)}{1!}x + \frac{\operatorname{arctg}''(0)}{2!}x^2 +$$
$$+ \frac{\operatorname{arctg}'''(0)}{3!}x^3 + o(x^3), \quad x \to 0.$$

Учитывая, что

$$\operatorname{arctg}(0) = 0, \quad \operatorname{arctg}'(0) = \frac{1}{1+x^2}\Big|_{x=0} = 1,$$

$$\operatorname{arctg}''(0) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}\Big|_{x=0} = 0, \quad \operatorname{arctg}'''(0) = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}\Big|_{x=0} = -2,$$

получим требуемое разложение:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3). \qquad \bullet$$

3. Оценить абсолютную погрешность приближенной формулы

$$e^x \sim 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} = P_n(x) \tag{3}$$

при $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Δ Для получения оценки абсолютной погрешности нужно оценить остаточный член $R_{n+1}(x) = e^x - P_n(x)$. Остаточный член $R_{n+1}(x)$ в форме Лагранжа для функции e^x имеет вид $R_{n+1}(x) = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}\,e^{\theta x}$ $(0 < \theta < 1)$. Отсюда получаем

$$|R_{n+1}(x)| \leqslant \frac{e}{(n+1)!} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{4}$$

Это и есть искомая оценка абсолютной погрешности приближенной формулы (3) при $0 \leqslant x \leqslant 1$. ▲

4. С помощью оценки (4) решить следующую задачу: сколько членов нужно взять в формуле (3) при $x = 1$, чтобы вычислить число e с точностью 10^{-6}?

Δ Нетрудно подсчитать, что $10! > 3 \cdot 10^6$. Поэтому $\dfrac{e}{10!} < \dfrac{3}{3 \cdot 10^6} = 10^{-6}$. Таким образом, достаточно в формуле (3) при $x = 1$ положить $n = 9$, чтобы получить число e с точностью 10^{-6}. ▲